Homéomorphisme de l'exponentielle des matrices hermitiennes — Rombaldi, Algèbre et géométrie p. 771-780

Théorème : Notons $\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ A^* = A\}$ et $\mathcal{H}_n^{++} = \{A \in \mathcal{H}_n\ ;\ \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \langle Ax, x\rangle > 0\}$.
Alors $\exp : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n^{++}$ est un homéomorphisme.

1) $\exp(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n^{++}$:

Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Alors $\exp(A) = \exp(\underbrace{\tfrac{1}{2}A}_{=A^*})\exp(\tfrac{1}{2}A) = \exp(\tfrac{1}{2}A)^*\exp(\tfrac{1}{2}A) \in \mathcal{H}_n^{++}$ $\longleftarrow$ $\langle \exp(\tfrac{1}{2}A)^*\exp(\tfrac{1}{2}A)x, x\rangle = \|\exp(\tfrac{1}{2}A)x\|^2 > 0$ car $\exp(\tfrac{1}{2}A) \in GL_n(\mathbb{C})$ et $x \neq 0$

2) Surjectivité :

Soit $A \in \mathcal{H}_n^{++}$. Par le théorème spectral, il existe $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ où $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $A = UDU^*$. Par surjectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $\forall 1 \leq k \leq n$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_k = e^{\lambda_k}$.
D'où :
$$A = U\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})U^* = \exp\left(U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^*\right)$$
et $X = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)U^* \in \mathcal{H}_n$ car $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. D'où la surjectivité.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall 1 \leq k \leq n$, $\lambda_k = Q(\mu_k)$. Alors :
$$X = U\,\mathrm{diag}(Q(\mu_1), \dots, Q(\mu_n))U^* = Q\left(U\,\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)U^*\right) = Q(A).$$

3) Injectivité :

Soit $Y \in \mathcal{H}_n$ telle que $\exp(Y) = A = \exp(X)$. Alors, Y commute avec $\exp(Y)$ donc avec A donc avec $X = Q(A)$.
De plus, X et Y sont diagonalisables. Elles sont donc codiagonalisables i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et $Y = P\Lambda P^{-1}$ où $\Delta, \Lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont diagonales. Mais $\exp(X) = \exp(Y)$ i.e. $P\exp(\Delta)P^{-1} = P\exp(\Lambda)P^{-1}$ donc $\exp(\Delta) = \exp(\Lambda)$ car P inversible. Par injectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $\Delta = \Lambda$ i.e. $X = Y$.
D'où l'injectivité.

4) Homéomorphisme :

On sait que $\exp$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc sur $\mathcal{H}_n$.
Soit $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_n^{++}$ qui converge vers $B \in \mathcal{H}_n^{++}$. On sait alors qu'il existe $(A_k)_k \in \mathcal{H}_n$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp(A_k) = B_k$ et $A \in \mathcal{H}_n$ telle que $\exp(A) = B$. Montrons que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A.

i) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée :

Puisque $0 < \rho(B) = \|B\|_2 = \lim_{k \to \infty} \|B_k\|_2 = \lim_{k \to \infty} \rho(B_k)$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall k \geq k_0,\quad 0 < \tfrac{1}{2}\rho(B) \leq \rho(B_k) \leq \tfrac{3}{2}\rho(B)$$
Posons $\alpha = \min\left\{\min_{k<k_0} \rho(B_k), \tfrac{1}{2}\rho(B)\right\}$ et $\beta = \max\left\{\max_{k<k_0} \rho(B_k), \tfrac{3}{2}\rho(B)\right\}$. Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq \rho(B_k) \leq \beta$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_k)$. Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e^{\lambda} = \mu \in \mathrm{Sp}(B_k)$ car $\exp(A_k) = B_k$ et A_k, B_k sont diagonalisables.
D'où $\ln(\alpha) \leq \lambda \leq \ln(\beta)$ i.e. $|\lambda| \leq \underbrace{\max\{|\ln\alpha|, |\ln\beta|\}}_{=:R}$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho(A_k) \leq R$ i.e. $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

ii) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a une seule valeur d'adhérence :

Soit $A' = \lim_{k \to \infty} A_{\varphi(k)}$ une valeur d'adhérence de $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Alors $A' \in \mathcal{H}_n$ car $\mathcal{H}_n$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car $\mathcal{H}_n$ est de dimension finie) et :
$$\exp(A') \underset{\text{par continuité de exp}}{=} \lim_{k \to \infty} \exp(A_{\varphi(k)}) = \lim_{k \to \infty} B_{\varphi(k)} = B = \exp(A) \quad \text{car } (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } B$$
D'où $A' = A$ par injectivité de $\exp : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n^{++}$.

Ainsi, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A et $\exp^{-1} : \mathcal{H}_n^{++} \to \mathcal{H}_n$ est continue.

gagner du temps sur cette partie en invoquant la continuité et l'injectivité de exp